סדרות

# הגדרה

סדרה הינה רצף אינסופי מסודר של מספרים.

למשל

למשל

סדרה אינה צריכה לקיים שום חוקיות(למרות שהיא יכולה לקיים חוקיות)

למשל:

*באופן מדוייק* סדרה ממשית הינה פונקציה מהטבעיים לממשיים.

למשל

דוגמה נוספת:

# גבול

*נקרא גבול של הסדרה אם* ***לכל******קיים*** *כך ש****לכל*** *מתקיים*

*מסמנים*

– אורך. – מקום בסדרה. – החל מהמקום והלאה. - המרחק בין L ל

נקודה L על ציר הממשיים נקראת גבול של סדרה אם לכל אורך שנבחר() קיים מקום בסדרה שהחל ממנו והלאה כל איברי הסדרה קרובים לגבול L עד כדי האורך שנבחר().

# דוגמאות

נרשום כמה איברים:

משערים שהגבול הינו 1. יהי (כלומר מישהו נתן לנו אורך כלשהו). צ"ל כך שלכל מתקיים :

לפי ארכימדס קיים כך ש . ברור שלכל ולכן כפי שרצינו.

שלילת הגדרת הגבול

L אינו גבול הסדרה אם **קיים** כך ש**לכל** **קיים** כך שמתקיים

זאת אומרת שיש אינסוף איברים שלא נמצאים סביב L כי אם היה מספר סופי היה אפשר פשוט לקחת את האיבר האחרון שנמצא מחוץ לסביבה של L

לסדרה אין גבול כלל אם לכל **קיים** כך ש**לכל** **קיים** כך שמתקיים

# תרגיל

נוכיח שלסדרה אין גבול

## פתרון

נוכיח ש אינו גבול(ההוכחה ל דומה). נראה ש מקיים את שלילת הגבול. לכל קיים אי זוגי עבורו .

# תרגיל

הוכח כי גבול הסדרה הינו 1

## פתרון

יהי . צ"ל כך שלכל מתקיים

ברור שאם אזי , אחרת נסמן , אבל ככל שמכפילים במספר קטן מאחד התוצאה קטנה – סתירה. ולכן:

צ"ל ש. נעלה בחזקת n(מדובר באיברים חיוביים:

כמה פעמים מופיע בביטוי הנ"ל? כל יכול להופיע עם כל אחר, לכן התשובה היא :  
 ואפשר לכתוב:

צ"ל נקטין את הצד הגדול ונקבל כלומר ולכן

נבחר ולכן זה מתקיים.

אריתמטיקה של גבולות

יהיו סדרות כך ש :

1. אם אזי

# תרגיל

# תרגיל

נניח ול אין גבול. האם יודעים משהו על הסדרה ?

## ניקח דוגמאות

# תרגיל

נניח , חסומה. כלומר קיים כך שלכל n . הוכח

## הוכחה

נתון ש לכן עבור קיים כך שלכל מתקיים , לכן החל מאותה נקודה

התכנסות במובן הרחב

תהי סדרה. אם לכל קיים כך שלכל מתקיים נאמר ש מתכנסת לאינסוף במובן הרחב*.*

# תרגיל

נתון . הוכח ש מתכנס במובן הרחב ל

## פתרון

לכן קיים כך ש:

יהי צ"ל . נקטין את הצד הגדול:

נקטין את הצד הגדול עוד יותר

*לפי ארכימדס קיים n כזה*

# תרגיל

הוכח ש

הערה: אם אזי

## הוכחה

נקטין את הביטוי – נמחק את כל מה שקטן מ ונהפוך את כל שאר האיברים ל: